Математичка гимназија у Београду
Додатна настава из математике
19.02.2006.

Вектори

Миливоје Лукић
milivoje.lukic@gmail.com

1. Линеарне комбинације вектора

Вектор $\vec{v}$ је линеарна комбинација вектора $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ ако постоје скалари (одн. реални бројеви) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ такви да је

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n. \tag{1}$$

Вектори $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ су линеарно независни ако је једнакост

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0} \tag{2}$$

испуњена само за $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. У супротном, они су линеарно зависни.

Сваки вектор у равни се може представити као линеарна комбинација произвољна два линеарно независна вектора, а сваки вектор у простору као линеарна комбинација произвољна три линеарно независна вектора.

Ако су $\vec{a}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$ колинеарни вектори, онда са $\vec{a}/\vec{b}$ означавамо реалан број λ, такав да је $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Нека су A и B различите тачке, и M и O произвољне тачке. Тада M припада правој AB ако и само ако је $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}$, за неко $\alpha \in \mathbb{R}$. При томе је $\alpha = \overrightarrow{BM}/\overrightarrow{BA}$.

Нека су A, B и C неколинеарне тачке, и M и O произвољне тачке. Тада M припада равни ABC ако и само ако је $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + (1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OC}$, за неке α, $\beta \in \mathbb{R}$.

Чевина и Менелајева теорема: Нека је ABC троугао и нека су A_1, B_1 и C_1 тачке на правама BC, AC и AB, редом. Посматрајмо однос

$$R = \frac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}\,\frac{\overrightarrow{BA_1}}{\overrightarrow{A_1C}}\,\frac{\overrightarrow{CB_1}}{\overrightarrow{B_1A}}. \tag{3}$$

Праве AA_1, BB_1 и CC_1 се секу у једној тачки ако и само ако је $R = 1$, а тачке A_1, B_1 и C_1 су колинеарне ако и само ако је $R = -1$.

Ван Обелова и Брокарова релација: Нека је ABC троугао, P тачка у равни тог троугла, и A_1, B_1, C_1 пресеци правих BC и AP, AC и BP, AB и CP, редом. Нека је $\overrightarrow{BA_1}/\overrightarrow{A_1C} = z/y$, $\overrightarrow{CB_1}/\overrightarrow{B_1A} = x/z$, $\overrightarrow{AC_1}/\overrightarrow{C_1B} = y/x$. Тада је

$$\overrightarrow{AP}/\overrightarrow{PA_1} = (y+z)/x. \tag{4}$$

Нека је даље тачка Q пресек правих B_1C_1 и AP. Тада је

$$2\,\overrightarrow{AQ}/\overrightarrow{QA_1} = \overrightarrow{AP}/\overrightarrow{PA_1}. \tag{5}$$

2. Скаларни производ

Скаларни производ је операција која сваком пару вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ придружује скалар

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a},\vec{b}). \tag{6}$$

Истакнимо следећа својства скаларног производа:

(1) За сваки вектор $\vec{a}$ важи $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$,

(2) Вектори $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ су нормални ако и само ако је $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,

(3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,

(4) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$,

(5) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Наведимо сада неколико важних геометријских теорема које се једноставно доказују уз помоћ скаларног производа.

Стјуартова теорема: Нека је D тачка на страници BC троугла ABC. Тада је

$$AD^2 = \frac{BD}{BC}AC^2 + \frac{CD}{BC}AB^2 - BD \cdot CD. \tag{7}$$

Доказ: Можемо записати $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + (1-\alpha)\overrightarrow{AC}$. При томе, како је тачка D на страници BC, а не само на правој BC, имамо додатни услов $0 < \alpha < 1$. Такође, $\alpha = CD/BC$. Зато је

$$\begin{aligned} AD^2 = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} &= (\alpha\overrightarrow{AB} + (1-\alpha)\overrightarrow{AC}) \cdot (\alpha\overrightarrow{AB} + (1-\alpha)\overrightarrow{AC}) \\ &= \alpha^2 AB^2 + (1-\alpha)^2 AC^2 + 2\alpha(1-\alpha)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \alpha^2 AB^2 + (1-\alpha)^2 AC^2 + \alpha(1-\alpha)(AB^2 + AC^2 - BC^2) \\ &= \alpha AB^2 + (1-\alpha)AC^2 - \alpha(1-\alpha)BC^2, \end{aligned}$$

што је еквивалентно Стјуартовој теореми. □

Хамилтонова теорема: Нека је O центар описаног круга, а H ортоцентар троугла ABC. Тада је

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \tag{8}$$

Доказ: Постоји јединствена тачка H' за коју важи $\overrightarrow{OH'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Уколико докажемо да за ову тачку важи $AH' \perp BC$ и $BH' \perp AC$, следиће да је $H' = H$, чиме ће теорема бити доказана. Докажимо да је $AH' \perp BC$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH'} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{OH'} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= R^2 - R^2 = 0. \end{aligned}$$

Аналогно се доказује и $BH' \perp AC$. □

Ојлерова права: У произвољном троуглу ABC ортоцентар H, тежиште M и центар описаног круга O су колинеарни, и тачка M дели дуж HO у односу $2:1$.

Доказ: Означимо са A_1 средиште странице BC. Тада је $\overrightarrow{OA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ и $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OA_1}$, па је $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Поређењем са Хамилтоновом теоремом непосредно закључујемо да је $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$, одакле следи тврђење теореме. □

Лајбницова теорема: Нека је M тежиште троугла ABC. Тада за сваку тачку P у равни троугла ABC важи

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3PM^2. \tag{9}$$

Доказ: Приметимо прво да је

$$PA^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MP}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MP}) = MA^2 + PM^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MP}. \tag{10}$$

Зато је

$$\begin{aligned} PA^2 + PB^2 + PC^2 &= MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3PM^2 - 2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{MP} \\ &= MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3PM^2, \end{aligned}$$

јер је $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. $\square$

3. Векторски и мешовити производ

Векторски производ је операција која сваком пару вектора $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ придружује вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ из $\mathbb{R}^3$ чији је интензитет $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\angle(\vec{a}, \vec{b})$, правац је нормалан на раван одређену векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а смер је такав да је тројка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ позитивно оријентисана.

Интензитет векторског производа вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ једнак је површини паралелограма одређеног векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Векторски производ има следећа својства:

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$,

(2) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$,

(3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Ненула вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ су колинеарни (паралелни) ако и само ако је $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

Мешовити производ је операција која свакој тројци вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ у простору $\mathbb{R}^3$ придружује скалар $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Мешовити производ вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ је запремина паралелепипеда чије су ивице одређене векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Мешовити производ има следећа својства:

(1) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}]$,

(2) $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$,

(3) $[\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$,

(4) $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] = [\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}] + [\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}]$.

4. Задаци

1. Доказати да се од тежишних дужи троугла може саставити троугао.

2. Нека су A_1, B_1 и C_1 тачке на страницама BC, AC и AB троугла ABC. Доказати да се тежишта троуглова ABC и $A_1B_1C_1$ поклапају ако и само ако је $\overrightarrow{AC_1}/\overrightarrow{C_1B} = \overrightarrow{BA_1}/\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{CB_1}/\overrightarrow{B_1A}$.

3. Нека је $ABCD$ паралелограм, и S тачка у његовој унутрашњости. Нека $E \in AB$ и $F \in AD$ тако да је $AESF$ паралелограм. Нека је M пресек DE и BF. Доказати да су C, S и M колинеарне.

4. Права дели троугао на два дела истих обима и површина. Доказати да центар уписаног круга тог троугла лежи на тој правој.

5. Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао, и H_a, H_b, H_c, H_d ортоцентри троуглова BCD, ACD, ABD, ABC, редом. Доказати да се дужи AH_a, BH_b, CH_c, DH_d секу у једној тачки.

6. Нека су A, B, C и D произвољне тачке у равни. Доказати да је $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

7. Дате су тачке A, B, C, D. Доказати да је $AC^2 + BD^2 \leq AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$, при чему једнакост важи ако и само ако је $ABCD$ паралелограм.

8. Доказати да су дијагонале паралелограма нормалне ако и само ако су му суседне странице једнаке.

9. Под средњим линијама четвороугла $ABCD$ подразумевамо дужи MP и NQ, где су M, N, P, Q средишта редом дужи AB, BC, CD, DA. Доказати да:

   (а) Ако су средње линије четвороугла подударне, тада су дијагонале тог четвороугла нормалне.

   (б) Ако су средње линије четвороугла нормалне, тада су дијагонале тог четвороугла подударне.

10. (БМО1985.1) Нека је O центар круга описаног око троугла ABC, D средиште дужи AB, и E тежиште троугла ACD. Доказати да је $OE \perp CD$ ако и само ако је $AB = AC$.

11. Нека су P и Q средишта дијагонала четвороугла $ABCD$. Доказати да је $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2$.

12. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао такав да је $AB \perp BC$, $AD \perp DC$ и $AC \perp BD$. Нека су E и F тачке на страницама BC и CD такве да је $DE \perp AF$. Доказати да је $AE \perp BF$.

13. Кроз тачку O пролази у равни 1999 правих $p_1, p_2, \ldots, p_{1999}$ међу којима нема управних. Доказати да можемо на свакој од правих p_i изабрати по једну тачку $A_i \neq O$, тако да важи $A_1A_3 \perp p_2$, $A_2A_4 \perp p_3$, $A_3A_5 \perp p_4$, $\ldots$, $A_{1997}A_{1999} \perp p_{1998}$, $A_{1998}A_1 \perp p_{1999}$, $A_{1999}A_2 \perp p_1$.

14. Две праве у равни, AB и XY, су нормалне ако и само ако је $AX^2 - BX^2 = AY^2 - BY^2$

15. Нека је $ABCDE$ конвексни петоугао и $AB \parallel CE$, $BC \parallel AD$, $CD \parallel BE$, $DE \parallel AC$. Доказати да је $AE \parallel BD$.

16. $OABC$ је тетраедар у коме је $OA = OB = OC$. Нека је S центар лопте уписане у тај тетраедар. Доказати да је вектор $\overrightarrow{OS}$ колинеаран са вектором $\sin(\angle BOC) \cdot \overrightarrow{OA} + \sin(\angle COA) \cdot \overrightarrow{OB} + \sin(\angle AOB) \cdot \overrightarrow{OC}$.

17. (ИМО1994.2) Нека је ABC једнакокраки троугао са $AB = AC$. Нека је M средиште дужи BC и O тачка праве AM за коју је OB нормално на AB. Нека је Q произвољна тачка странице BC различита од B и C, и $E \in AB$, $F \in AC$ тако да су тачке E, Q, F различите и колинеарне. Доказати да је OQ нормално на EF ако и само ако је $QE = QF$.