Друштво математичара Србије

51. ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

Јагодина, 21.04.2018.

6. разред

1. Број чланова библиотеке био је 2012. године за једну петину већи него 2011. године, 2013. године био је за једну петину већи него 2012. године, 2014. године био је за једну петину већи него 2013. године, а 2015. године био је за три петине мањи него 2014. године. Ако је број чланова библиотеке 2015. године био за 6176 члнова мањи него 2011. године, колико је чланова библиотека имала 2015. године?

2. Троугао ABC је једнакокрак са основицом AB и углом при врху C једнаким 30°. Тачке D и E су подножја висина из темена A и B, редом, а тачке F и G су средишта страница BC и AC, редом. Докажи да су праве DG и EF узајамно нормалне.

3. На табли је написан произвољан троцифрен природан број чија цифра јединица није 0. У сваком потезу са табле се избрише број који је већ на табли и уместо њега упише апсолутна вредност разлике тог броја и броја написаног истим цифрама у обрнутом редоследу. Докажи да ће на табли након неколико потеза остати број 0.

4. Дат је оштроугли троугао ABC и полуправе Ax и Ay, такве да углови xAB и yAC немају заједничких тачака са троуглом и да је $\measuredangle xAB = \measuredangle yAC < 90^\circ$. Нека су B' и C' подножја нормала из темена B и C на полуправе Ax и Ay, редом, и нека је M средиште странице BC. Докажи да је $MB' = MC'$.

5. Колико има парних петоцифрених природних бројева чије су све цифре међусобно различите и различите су од нуле, и сваке две су узајамно просте?

Сваки задатак вреди 20 поена

Време за рад је 180 минута

Друштво математичара Србије

51. ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

Јагодина, 21.04.2018.

7. разред

1. Колико има петоцифрених природних бројева палиндрома x, таквих да је и $3x$ такође петоцифрени палиндром? [Број је палиндром ако се исто чита слева удесно као и сдесна улево.]

2. Нека је $A_1A_2\dots A_{12}$ правилни дванаестоугао, D и E подножја висина из темена A_8 и A_1, редом, троугла $A_1A_5A_8$. Означимо са M подножје нормале из тачке D на A_1A_8. Докажи да је $A_1M = A_8E$.

3. Нека је $k(O,r)$ полукружница над дужи AB као пречником. Кружница $k_1(O_1,r_1)$ додирује пречник AB у његовом средишту и полукружницу k. Кружнице $k_2(O_2,r_2)$ и $k_3(O_3,r_3)$ додирују полукружницу k, пречник AB и кружницу k_1. Докажи да су тачке O, O_2, O_1 и O_3 темена ромба.

4. Одреди све реалне бројеве a такве да су бројеви $a+\sqrt{15}$ и $\dfrac{1}{a}-\sqrt{15}$ цели.

5. На табли су написана 24 различита природна броја не већа од 50. Докажи да међу њима постоје два чији је збир дељив са 7.

Сваки задатак вреди 20 поена

Време за рад је 180 минута

Друштво математичара Србије

51. ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

Јагодина, 21.04.2018.

8. разред

1. Правоугаона таблица 29×41 попуњена је природним бројевима $1, 2, \dots, 29 \cdot 41$ најпре тако што су у првом реду, почевши од доњег левог угла, редом записани бројеви $1, 2, \dots,$ 29, у другом реду бројеви $30, 31, \dots, 58$ и тако даље до краја. Затим је иста таблица попуњена истим бројевима тако што су у првој колони, такође почевши од доњег левог угла, редом записани бројеви $1, 2, \dots, 41$, у другој колони бројеви $42, 43, \dots, 82$ и тако даље до краја. Колико има поља таблице у којима је при оба попуњавања био записан исти број?

2. Ако за реалне бројеве x, y, z важи $x + y + z = 8$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 32$, одреди највећу могућу вредност броја z.

3. Бочна страна OAB тростране пирамиде $OABC$ је једнакостранични троугао странице $AB = 6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Ивице CA, CB и CO су међусобно једнаке. Висина пирамиде је $OO_1 = 4{,}5\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Израчунај површину пресека пирамиде $OABC$ са равни COO_1.

4. Кружнице k_1 и k_2 секу се у тачкама A и B. Нека је CD пречник кружнице k_1, при чему је тачка C изван кружнице k_2, а тачка D унутар ње. Праве AD и BD редом секу кружницу k_2 још у тачкама M и N, а праве CD и MN се секу у тачки E. Докажи да је $AC \cdot BD \cdot EN = AD \cdot BC \cdot EM$.

5. На колико начина је могуће обојити све једноцифрене природне бројеве, бојећи сваки број једном од три боје – плавом, белом или црвеном, а да притом било која два броја чији је збир непаран не буду обојена истом бојом?

Сваки задатак вреди 20 поена

Време за рад је 180 минута