ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2017/2018. ГОДИНЕ

Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

I разред — **ЗАДАЦИ – ФЕРМИОНСКА КАТЕГОРИЈА*** — **ОКРУЖНИ НИВО** **3. март 2018.**

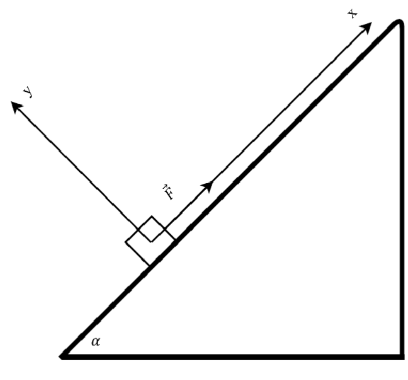
1. Две материјалне тачке A и B, крену из исте тачке, из мировања, крећући се при томе по кругу полупречника $r = 2\mathsf{m}$. Тачка A се креће у смеру казаљке на сату, а тачка B у смеру супротном од смера казаљке на сату. До тренутка када се поново сретну пређу једнаке путеве. Тачка A се креће константним тангенцијалним убрзањем, а тачка B константном угаоном брзином $\omega_{\rm B} = 1\frac{\mathsf{rad}}{\mathsf{s}}$. Наћи тангенцијално убрзање тачке A. Одредити однос нормалних убрзања тачака A и B, у тренутку када се поново сретну. **(20 поена)**

2. Тело масе $m = 10\mathsf{kg}$, креће се под дејством силе $\vec{F}$ уз стрму раван нагибног угла $\alpha = 45°$ (видети Слику 1). Закон праволинијског кретања тела је $x(t) = At^2 + Bt^3$, где су A и B и константе. Тело креће из мировања. Брзина тела након $t_1 = 1\mathsf{s}$ од почетка кретања је $v_1 = 1\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$, а након $t_2 = 10\mathsf{s}$ је $v_2 = 20\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$. Коефицијент трења између тела и стрме равни је $\mu = 0{,}1$. Наћи интензитет силе $\vec{F}$, након $t_2 = 10\mathsf{s}$ кретања. **(20 поена)**

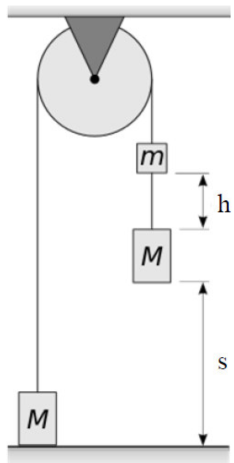
3. При слободном падању, средња брзина камена у току последње секунде падања је 1,5 пута већа од средње брзине у току претпоследње секунде падања. С које висине је камен пуштен да слободно пада? **(15 поена)**

4. Два тега исте масе $M = 2\mathsf{kg}$ су спојена канапом који је пребачен преко котура. Леви тег се налази на подлози, док се десни налази на $s = 30\mathsf{cm}$ изнад подлоге. На $h = 13\mathsf{cm}$ изнад изнад десног тега налази се додатни тег масе $m = 1\mathsf{kg}$ (видети Слику 2). Систем креће из мировања. Одредити којом брзином доњи тег са десне стране пада на подлогу и доказати да ће се тегови са десне стране дотаћи. Занемарити масе канапа и котура, деформацију канапа услед истезања и трење; сматрати да десни тег не одскаче од подлоге у тренутку када се спусти на њу. **(20 поена)**

5. Човек баца лопту о зид удаљен $d = 17\mathsf{m}$ од њега, с намером да се лопта након одбијања од зида врати њему у руку. Лопту је бацио почетном брзином од $16\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$, под углом од 43° у односу на хоризонт и дуж правца нормалног на раван зида. Пола секунде након што је избацио лопту, схвата да ју је преслабо бацио и почиње да се приближава зиду константном брзином, такође дуж правца нормалног на раван зида. Којом брзином се кретао ако је лопту ухватио у руку у положају који је $\Delta y = 30\mathsf{cm}$ нижи од положаја из којег је бацио лопту? Лопта се од зида одбија тако да јој се само смер x - компоненте брзине промени, док y - компонента остаје иста. Сматрати да је једина промена у држању човека приликом бацања и хватања лопте, спуштање длана руке којом је лопта избачена, за $\Delta y = 30\mathsf{cm}$ у вертикалном правцу. Апроксимирати да су, приликом бацања и хватања лопте, длан руке којом је избачена лопта и ноге човека на једнакој удаљености од зида. **(25 поена)**



Слика 1: Слика уз други задатак.



Слика 2: Слика уз четврти задатак.

Приликом решавања задатака користити да је убрзање силе Земљине теже $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$. Отпор ваздуха занемарити у задацима.

*У фермионској категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима средњих стручних школа, уметничких школа и свих врста гимназија осим специјализованих гимназија за области математика и физика.

Задатке припремили: *др Петар Мали* и *мастер Давид Кнежевић*, Природно-математички факултет, Нови Сад
Рецензент: *др Милутин Степић*, Институт за нуклеарне науке "Винча", Београд
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2017/2018. ГОДИНЕ

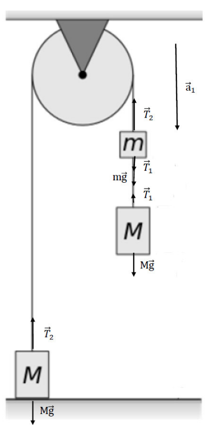
Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

I разред **РЕШЕЊА – ФЕРМИОНСКА КАТЕГОРИЈА** **ОКРУЖНИ НИВО** **3. март 2018.**

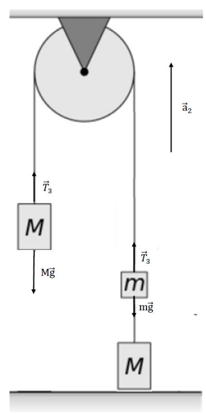
1. На основу чињенице да тачке А и В пређу једнаке путеве, оне опишу и једнаке углове до поновног сусрета $\varphi_{\rm A} = \varphi_{\rm B} = \pi$rad. Означимо тангенцијално убрзање тачке А са $a_{t\rm A}$, а време које протекне до поновног сусрета са t. Брзина тачке А у тренутку поновног сусрета је $v_{\rm A} = a_{t\rm A}t$ $\boxed{\textbf{1п}}$, а одговарајући пређени пут је $s_{\rm A} = \frac{1}{2}a_{t\rm A}t^2$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Брзина тачке В у тренутку поновног сусрета је $v_{\rm B} = \omega_{\rm B}r$ $\boxed{\textbf{1п}}$, а одговарајући пређени пут је $s_{\rm B} = \omega_{\rm B}rt$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Како до тренутка поновног сусрета пређу једнаке путеве, важи $s_{\rm A} = s_{\rm B} = \pi r$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Из $\omega_{\rm B}rt = \pi r$, добија се $t = \frac{\pi}{\omega_{\rm B}}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Заменом добијеног израза у $s_{\rm A} = \pi r$, добија се $a_{t\rm A} = \frac{2\omega_{\rm B}^2 r}{\pi} = 1{,}27\frac{\rm m}{\rm s^2}$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Брзина тачке А након времена t је $v_{\rm A}(t) = a_{t\rm A}t = \frac{2\omega_{\rm B}^2 r}{\pi}\frac{\pi}{\omega_{\rm B}} = 2\omega_{\rm B}r$ $\boxed{\textbf{2п}}$, па је стога нормално убрзање $a_{n\rm A}(t) = \frac{v_{\rm A}^2(t)}{r} = 4\omega_{\rm B}^2 r$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Нормално убрзање тачке В, је за све време кретања $a_{n\rm B}(t) = a_{n\rm B} = \omega_{\rm B}^2 r$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Стога је тражени однос, у тренутку поновног сусрета, $\frac{a_{n\rm A}(t)}{a_{n\rm B}} = 4$ $\boxed{\textbf{2п}}$.

2. Померај у кратком временском интервалу од t до $t+\Delta t$ износи $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) = A(t+\Delta t)^2 + B(t+\Delta t)^3 - At^2 - Bt^3 = A[t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2] + B[t^3 + 3t^2\Delta t + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3] - At^2 - Bt^3$. Након што се занемаре виши степени Δt, (јер је Δt мало), добија се да је $\Delta x = 2At\Delta t + 3Bt^2\Delta t$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Одатле се добија израз за тренутну брзину као $v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2At + 3Bt^2$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Како су познате тренутне брзине након $t_1 = 1$s и након $t_2 = 10$s, добија се систем једначина из којих се одреде константе A и B. Систем једначина је $2A+3B = 1$ и $20A+300B = 20$ $\boxed{\textbf{2п}}$.Решавањем система једначина добија се $A = \frac{4}{9}\frac{\rm m}{\rm s^2}$, $B = \frac{1}{27}\frac{\rm m}{\rm s^3}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Промена брзине у кратком временском интервалу од t до $t+\Delta t$ износи $\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t) = 2A(t+\Delta t) + 3B(t+\Delta t)^2 - 2At - 3Bt^2$, што након занемаривања виших степена Δt даје $\Delta v = 2A\Delta t + 6Bt\Delta t$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Одатле, се убрзање добија као $a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 2A + 6Bt$ $\boxed{\textbf{2п}}$. (*Уколико неко директно из једначина кретања добије добре вредности тренутне брзине и убрзања признати све поене, који су предложени за дати поступак*). Како се убрзање мења у функцији времена и сила се мора мењати у функцији времена. Како дуж y-осе нема кретања, силе су уравнотежене, па је $N = Q_\perp = mg\cos\alpha$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Одатле је интензитет силе трења $F_{tr} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Пројектовањем сила дуж $x-$ правца добија се $F(t) - Q_{||} - F_{tr} = ma(t)$ $\boxed{\textbf{1п}}$, где је $Q_{||} = mg\sin\alpha$. Након срећивања, имамо $F(t) - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma(t)$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Одатле је зависност интензитета силе од времена дата са $F(t) = m(g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha + 2A + 6Bt)$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Након $t_2 = 10$s, интензитет силе је $F(t_2) = 107{,}19$N $\boxed{\textbf{1п}}$.

3. Обележимо са v_1 брзину коју има камен на почетку претпоследње секунде кретања, а са v_2 брзину коју има на крају претпоследње и почетку последње секунде кретања. Брзину коју камен има на крају последње секунде кретања означимо са v_3. Тада је средња брзина у претпоследњој секунди $v_{sr1} = \frac{v_1+v_2}{2}$ $\boxed{\textbf{1п}}$, а средња брзина у последњој секунди је $v_{sr2} = \frac{v_2+v_3}{2}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Из услова задатка $1{,}5v_{sr1} = v_{sr2}$ и коришћењем да је $v_2 = v_1 + g$ и $v_3 = v_1 + 2g$ $\boxed{\textbf{1п}}$ добија се да је $v_3 = 34{,}34\frac{\rm m}{\rm s}$ $\boxed{\textbf{6п}}$. Висина са које је камен пуштен да слободно пада је $h = \frac{v_3^2}{2g}$ $\boxed{\textbf{4п}}$. Заменом бројних вредности добија се $h = 60{,}1$m $\boxed{\textbf{2п}}$.



Слика 1: Ситуација пре него што је тег с десне стране додирнуо подлогу.



Слика 2: Ситуација након што је тег с десне стране додирнуо подлогу.

Задатке припремили: *др Петар Мали* и *мастер Давид Кнежевић*, Природно-математички факултет, Нови Сад
Рецензент: *др Милутин Степић*, Институт за нуклеарне науке "Винча", Београд
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

4. Једначине кретања су: $Ma_1 = Mg - T_1$ $\boxed{\textbf{1п}}$, $ma_1 = mg + T_1 - T_2$ $\boxed{\textbf{1п}}$ и $Ma_1 = T_2 - Mg$ $\boxed{\textbf{1п}}$ (видети Слику 1), одакле се сређивањем добија $a_1 = \frac{m}{2M+m}g = \frac{g}{5}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Време потребно десном тегу да се спусти $s = 30\mathsf{cm}$ и додирне подлогу је $t_p = \sqrt{\frac{2s}{a_1}} = \sqrt{\frac{10s}{g}}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Интензитет брзине тега у том тренутку је $v_p = a_1 t_p = \sqrt{\frac{2sg}{5}}$ $\boxed{\textbf{2п}}$, што је у датом тренутку интензитет брзине и осталих тегова. Пошто је десни тег додирнуо подлогу, потребно је написати нове једначине кретања за преостале тегове. Ове једначине су $ma_2 = T_3 - mg$ $\boxed{\textbf{1п}}$ и $Ma_2 = Mg - T_3$ $\boxed{\textbf{1п}}$ (видети Слику 2), одакле се добија да је $a_2 = \frac{M-m}{M+m}g = \frac{g}{3}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Време које би десном тегу било потребно да се заустави при оваквом кретању је $t_{\max} = \frac{v_p}{a_2} = \sqrt{\frac{18s}{5g}}$ $\boxed{\textbf{2п}}$, при чему би прешао $l = v_p t_{\max} - \frac{1}{2}a_2 t_{\max}^2 = \frac{6}{5}s - \frac{3}{5}s = \frac{3}{5}s = 18\mathsf{cm}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Како је $l > h$ следи да ће се тегови са десне стране дотаћи $\boxed{\textbf{3п}}$.
Напомена:
Рачунањем међукорака, добија се $a_1 = 1{,}96\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}^2}$, $t_p = 0{,}55\mathsf{s}$, $v_p = 1{,}08\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$, $a_2 = 3{,}27\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}^2}$, $t_{\max} = 0{,}33\mathsf{s}$. Рачунањем са овим бројним вредностима добија се $l = 17{,}83\mathsf{cm}$. Не скидати поене ученицима, који су рачунали међукораке и на крају добили овакво решење.

5. Посматрајмо кретање дуж y- осе. Време потребно да лопта дође у највишу тачку путање, се може добити из чињенице да је у највишој тачки y компонента брзине једнака нули: $v_y = v_{0y} - gt_1$, $t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Лопта ће се у том тренутку наћи на висини $y_{\max} = v_{0y}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g} - \frac{1}{2g}v_0^2 \sin^2\theta = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. За то време је лопта по $x-$ оси прешла пут од $x_1 = v_{0x}t_1 = \frac{v_0^2 \sin\theta\cos\theta}{g}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Након што лопта достигне максималну висину, њено кретање у $y-$ правцу се може третирати као слободан пад без почетне брзине, где се пређени пут може рачунати као $y = \frac{1}{2}gt^2$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Да би се лопта нашла на $\Delta y = 30\mathsf{cm}$ ниже од почетног положаја на y – оси, потребно је да пређе пут од $y_{\max} + \Delta y$ $\boxed{\textbf{3п}}$ за шта јој је потребно време: $t_2 = \sqrt{\frac{2(y_{\max}+\Delta y)}{g}} = \sqrt{\frac{2(\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}+\Delta y)}{g}}$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Током падања, лопта је по x–оси прешла пут од $x_2 = v_{0x}t_2 = v_0\cos\theta\sqrt{\frac{2(\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}+\Delta y)}{g}}$ $\boxed{\textbf{3п}}$, при чему се у неком тренутку одбила од зида. Пређени пут лопте у x–правцу, $x = x_1 + x_2$, сабран са растојањем које је прешао човек, мора у збиру дати двоструко растојање између човека и зида. Одатле следи да је човек прешао пут од $s_c = 2d - x = 2d - \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} - v_0\cos\theta\sqrt{\frac{2(\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}+\Delta y)}{g}}$ $\boxed{\textbf{4п}}$. Како је лопта пре него што ју је човек ухватио путовала $t_u = t_1 + t_2$, човек се кретао брзином од $v_c = \frac{s_c}{t_u - 0{,}5\mathsf{s}} = 4{,}37\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$ $\boxed{\textbf{4п}}$.
други начин:
Кретање лопте између бацања и хватања се може поделити на три дела. Коси хитац навише од избацивања до највише тачке путање, хоризонтални хитац од највише тачке путање до судара са зидом, и коси хитац наниже након судара са зидом до тренутка када човек ухвати лопту. Време потребно да лопта дође у највишу тачку путање, се може добити из чињенице да је у највишој тачки y компонента брзине једнака нули: $v_y = v_{0y} - gt_1$, $t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0\sin\theta}{g} = 1{,}11\mathsf{s}$ $\boxed{\textbf{2п}}$.Лопта ће се у том тренутку наћи на висини $y_{\max} = v_{0y}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{g} - \frac{1}{2g}v_0^2\sin^2\theta = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g} = 6{,}07\mathsf{m}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. За то време је лопта по $x-$ оси прешла пут од $x_1 = v_{0x}t_1 = \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} = 13{,}02\mathsf{m}$ $\boxed{\textbf{2п}}$, где је $v_{0x} = v_0\cos\theta = 11{,}7\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$. Након овог тренутка, кретање лопте третирамо као хоризонтални хитац са брзином у смеру x–осе $v_x = v_{0x} = 11{,}7\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Да би стигла до зида удаљеног $d = 17\mathsf{m}$, лопта треба по $x-$ оси да пређе растојање од $x_2 = d - x_1 = 3{,}98\mathsf{m}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Да би прешла ово растојање, потребно јој је време $t_2 = \frac{x_2}{v_{0x}} = 0{,}34\mathsf{s}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. За то време ће по y – оси прећи пут од $y_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 = 0{,}57\mathsf{m}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. У тренутку када удари у зид, y компонента брзине ће бити $v_y = gt_2 = 3{,}34\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Од овог трена па до трена када човек ухвати лопту, кретање лопте се третира као коси хитац наниже са почетним брзинама дуж x и $y-$ осе $v_x^{'} = v_{0x} = 11{,}7\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$ и $v_y^{'} = v_y = 3{,}34\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Да би се лопта нашла на $\Delta y = 30\mathsf{cm}$ ниже од почетног положаја на y –оси, потребно је да по y – оси пређе пут од $y_3 = y_{\max} - y_2 + y = 5{,}80\mathsf{m}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Време које је потребно да лопта пређе овај пут приликом косог хица наниже се може пронаћи решавањем квадратне једначине по времену за пређени пут $y_3 = v_y^{'}t_3 + \frac{1}{2}gt_3^2$ $\boxed{\textbf{2п}}$, односно $\frac{1}{2}gt_3^2 + v_y^{'}t_3 - y_3 = 0$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Из ове једначине узима се само позитивно решење, тј. $t_3 = \frac{-v_y^{'} + \sqrt{v_y^{'2} + 2gy_3}}{g} = 0{,}8\mathsf{s}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. По x – оси лопта ће прећи пут од $x_3 = v_x^{'}t_3 = 9{,}36\mathsf{m}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Растојање s_c које пређе човек би требало у збиру са растојањем x_3 да буде једнако почетном растојању између човека и зида, одакле се добија $s_c = d - x_3 = 7{,}64\mathsf{m}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Како је лопта пре него што

ју је човек ухватио путовала $t_u = t_1 + t_2 + t_3 = 2{,}25\mathsf{s}$ $\boxed{\textbf{1п}}$, човек се кретао брзином од $v_c = \frac{s_c}{t_u - 0{,}5\mathsf{s}} = 4{,}37\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$ $\boxed{\textbf{2п}}$.
трећи начин:
Ако се узме да је позиција лопте на y – оси, $y = 0$ приликом бацања лопте, потребно је наћи тренутак када ће се лопта наћи на позицији $y = -0{,}3\mathsf{m}$ на y –оси $\boxed{\textbf{2п}}$. Ово време се може пронаћи из једначине кретања $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Решавањем ове квадратне једначине за $y = -0{,}3\mathsf{m}$, где је $v_{0y} = v_0 \sin\theta$, добија се $t_{1,2} = \frac{v_0 \sin\theta \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta - 2gy}}{g}$ $\boxed{\textbf{5п}}$, одакле се узима само позитивно решење $t = \frac{v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta - 2gy}}{g}$ $\boxed{\textbf{5п}}$. За то време по x– оси лопта прелази пут од $x = v_{0x}t = v_0 \cos\theta \frac{v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta - 2gy}}{g}$ $\boxed{\textbf{2п}}$, при чему се у неком тренутку одбија од зида. Овај пут сабран са растојањем које је прешао човек треба да буде једнако двоструком растојању између човека и зида $(2d = 34\mathsf{m})$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Пут који је човек требао да пређе да би ухватио лопту је $s_c = 2d - x = 2d - v_0 \cos\theta \frac{v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta - 2gy}}{g}$ $\boxed{\textbf{5п}}$.
Брзина којом се човек кретао је: $v_c = \frac{s_c}{t - 0{,}5\mathsf{s}} = 4{,}37\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$ $\boxed{\textbf{2п}}$.

Задатке припремили: *др Петар Мали* и *мастер Давид Кнежевић*, Природно-математички факултет, Нови Сад
Рецензент: *др Милутин Степић*, Институт за нуклеарне науке "Винча", Београд
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2017/2018. ГОДИНЕ

Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

I разред **ЗАДАЦИ – БОЗОНСКА КАТЕГОРИЈА*** **ОКРУЖНИ НИВО** **3. март 2018.**

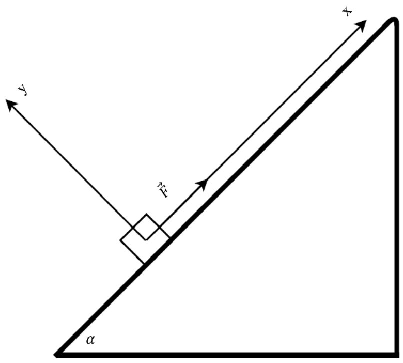
1. Две материјалне тачке A и B, крену из исте тачке, из мировања, крећући се при томе по кругу полупречника $r = 2\mathsf{m}$. Тачка A се креће у смеру казаљке на сату, а тачка B у смеру супротном од смера казаљке на сату. До тренутка када се поново сретну пређу једнаке путеве. Тачка A се креће константним тангенцијалним убрзањем, а тачка B константном угаоном брзином $\omega_{B} = 1\frac{\mathsf{rad}}{\mathsf{s}}$. Наћи тангенцијално убрзање тачке A. Одредити однос нормалних убрзања тачака A и B, у тренутку када се поново сретну. **(20 поена)**

2. Тело масе $m = 10\mathsf{kg}$, креће се под дејством силе $\vec{F}$ уз стрму раван нагибног угла $\alpha = 45°$ (видети Слику 1). Закон праволинијског кретања тела је $x(t) = At^2 + Bt^3$, где су A и B и константе. Тело креће из мировања. Брзина тела након $t_1 = 1\mathsf{s}$ од почетка кретања је $v_1 = 1\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$, а након $t_2 = 10\mathsf{s}$ је $v_2 = 20\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$. Коефицијент трења између тела и стрме равни је $\mu = 0{,}1$. Наћи интензитет силе $\vec{F}$, након $t_2 = 10\mathsf{s}$ кретања. **(20 поена)**

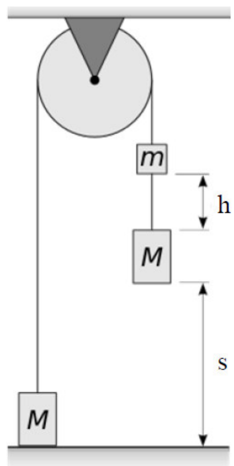
3. При слободном падању, средња брзина камена у току последње секунде падања је k пута већа од средње брзине у току претпоследње секунде падања. Наћи висину с које је камен пуштен да пада у функцији параметра k. **(15 поена)**

4. Два тега исте масе $M = 2\mathsf{kg}$ су спојена канапом који је пребачен преко котура. Леви тег се налази на подлози, док се десни налази на $s = 30\mathsf{cm}$ изнад подлоге. На $h = 13\mathsf{cm}$ изнад изнад десног тега налази се додатни тег масе $m = 1\mathsf{kg}$ (видети Слику 2). Систем креће из мировања. Одредити којом брзином доњи тег са десне стране пада на подлогу и доказати да ће се тегови са десне стране дотаћи. Занемарити масе канапа и котура, деформацију канапа услед истезања и трење; сматрати да десни тег не одскаче од подлоге у тренутку када се спусти на њу. **(20 поена)**

5. Човек баца лопту о зид удаљен $d = 17\mathsf{m}$ од њега, с намером да се лопта након одбијања од зида врати њему у руку. Лопту је бацио почетном брзином од $16\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$, под углом од $43°$ у односу на хоризонт и дуж правца нормалног на раван зида. Пола секунде након што је избацио лопту, схвата да ју је преслабо бацио и почиње да се приближава зиду константном брзином, такође дуж правца нормалног на раван зида. Којом брзином се кретао ако је лопту ухватио у руку у положају који је $\Delta y = 30\mathsf{cm}$ нижи од положаја из којег је бацио лопту? Лопта се од зида одбија тако да јој се само смер x - компоненте брзине промени, док y - компонента остаје иста. Сматрати да је једина промена у држању човека приликом бацања и хватања лопте, спуштање длана руке којом је лопта избачена, за $\Delta y = 30\mathsf{cm}$ у вертикалном правцу. Апроксимирати да су, приликом бацања и хватања лопте, длан руке којом је избачена лопта и ноге човека на једнакој удаљености од зида. **(25 поена)**



Слика 1: Слика уз други задатак.



Слика 2: Слика уз четврти задатак.

Приликом решавања задатака користити да је убрзање силе Земљине теже $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$. Отпор ваздуха занемарити у задацима.

*У бозонској категорији такмиче се ученици који похађају одељења која раде по програмима специјализованих гимназија за област математика и физика.

Задатке припремили: *др Петар Мали* и *мастер Давид Кнежевић*, Природно-математички факултет, Нови Сад
Рецензент: *др Милутин Степић*, Институт за нуклеарне науке "Винча", Београд
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ ФИЗИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА
ШКОЛСКЕ 2017/2018. ГОДИНЕ

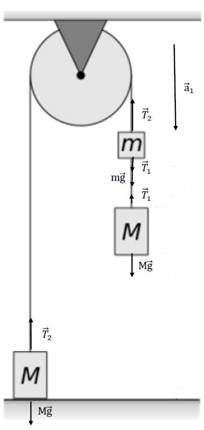
Друштво физичара Србије и Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије

I разред | **РЕШЕЊА – БОЗОНСКА КАТЕГОРИЈА** | **ОКРУЖНИ НИВО** **3. март 2018.**

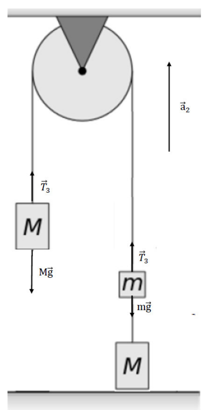
1. На основу чињенице да тачке A и B пређу једнаке путеве, оне опишу и једнаке углове до поновног сусрета $\varphi_{\mathrm{A}} = \varphi_{\mathrm{B}} = \pi\mathsf{rad}$. Означимо тангенцијално убрзање тачке A са $a_{t\mathrm{A}}$, а време које протекне до поновног сусрета са t. Брзина тачке A у тренутку поновног сусрета је $v_{\mathrm{A}} = a_{t\mathrm{A}}t$ $\boxed{\mathbf{1п}}$, а одговарајући пређени пут је $s_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}a_{t\mathrm{A}}t^2$ $\boxed{\mathbf{1п}}$. Брзина тачке B у тренутку поновног сусрета је $v_{\mathrm{B}} = \omega_{\mathrm{B}}r$ $\boxed{\mathbf{1п}}$, а одговарајући пређени пут је $s_{\mathrm{B}} = \omega_{\mathrm{B}}rt$ $\boxed{\mathbf{1п}}$. Како до тренутка поновног сусрета пређу једнаке путеве, важи $s_{\mathrm{A}} = s_{\mathrm{B}} = \pi r$ $\boxed{\mathbf{3п}}$. Из $\omega_{\mathrm{B}}rt = \pi r$, добија се $t = \frac{\pi}{\omega_{\mathrm{B}}}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Заменом добијеног израза у $s_{\mathrm{A}} = \pi r$, добија се $a_{t\mathrm{A}} = \frac{2\omega_{\mathrm{B}}^2 r}{\pi} = 1{,}27\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}^2}$ $\boxed{\mathbf{3п}}$. Брзина тачке A након времена t је $v_{\mathrm{A}}(t) = a_{t\mathrm{A}}t = \frac{2\omega_{\mathrm{B}}^2 r}{\pi}\frac{\pi}{\omega_{\mathrm{B}}} = 2\omega_{\mathrm{B}}r$ $\boxed{\mathbf{2п}}$, па је стога нормално убрзање $a_{n\mathrm{A}}(t) = \frac{v_{\mathrm{A}}^2(t)}{r} = 4\omega_{\mathrm{B}}^2 r$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Нормално убрзање тачке B, је за све време кретања $a_{n\mathrm{B}}(t) = a_{n\mathrm{B}} = \omega_{\mathrm{B}}^2 r$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Стога је тражени однос, у тренутку поновног сусрета, $\frac{a_{n\mathrm{A}}(t)}{a_{n\mathrm{B}}} = 4$ $\boxed{\mathbf{2п}}$.

2. Померај у кратком временском интервалу од t до $t + \Delta t$ износи $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) = A(t + \Delta t)^2 + B(t + \Delta t)^3 - At^2 - Bt^3 = A[t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2] + B[t^3 + 3t^2\Delta t + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3] - At^2 - Bt^3$. Након што се занемаре виши степени Δt, (јер је Δt мало), добија се да је $\Delta x = 2At\Delta t + 3Bt^2\Delta t$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Одатле се добија израз за тренутну брзину као $v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2At + 3Bt^2$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Како су познате тренутне брзине након $t_1 = 1\mathsf{s}$ и након $t_2 = 10\mathsf{s}$, добија се систем једначина из којих се одреде константе A и B. Систем једначина је $2A+3B = 1$ и $20A+300B = 20$ $\boxed{\mathbf{2п}}$.Решавањем система једначина добија се $A = \frac{4}{9}\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}^2}$, $B = \frac{1}{27}\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}^3}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Промена брзине у кратком временском интервалу од t до $t + \Delta t$ износи $\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t) = 2A(t + \Delta t) + 3B(t + \Delta t)^2 - 2At - 3Bt^2$, што након занемаривања виших степена Δt даје $\Delta v = 2A\Delta t + 6Bt\Delta t$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Одатле, се убрзање добија као $a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 2A + 6Bt$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. (*Уколико неко директно из једначина кретања добије добре вредности тренутне брзине и убрзања признати све поене, који су предложени за дати поступак*). Како се убрзање мења у функцији времена и сила се мора мењати у функцији времена. Како дуж y-осе нема кретања, силе су уравнотежене, па је $N = Q_\perp = mg\cos\alpha$ $\boxed{\mathbf{1п}}$. Одатле је интензитет силе трења $F_{tr} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$ $\boxed{\mathbf{1п}}$. Пројектовањем сила дуж $x-$ правца добија се $F(t) - Q_{||} - F_{tr} = ma(t)$ $\boxed{\mathbf{1п}}$, где је $Q_{||} = mg\sin\alpha$. Након сређивања, имамо $F(t) - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma(t)$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Одатле је зависност интензитета силе од времена дата са $F(t) = m(g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha + 2A + 6Bt)$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Након $t_2 = 10\mathsf{s}$, интензитет силе је $F(t_2) = 107{,}19\mathsf{N}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$.

3. Обележимо са v_1 брзину коју има камен на почетку претпоследње секунде кретања, а са v_2 брзину коју има на крају претпоследње и почетку последње секунде кретања. Брзину коју камен има на крају последње секунде кретања означимо са v_3. Тада је средња брзина у претпоследњој секунди $v_{sr1} = \frac{v_1+v_2}{2}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$, а средња брзина у последњој секунди је $v_{sr2} = \frac{v_2+v_3}{2}$ $\boxed{\mathbf{1п}}$. Из услова задатка $kv_{sr1} = v_{sr2}$ и коришћењем да је $v_2 = v_1 + g$ и $v_3 = v_1 + 2g$ $\boxed{\mathbf{1п}}$ добија се да је $v_3 = \frac{3k-1}{2(k-1)}g$ $\boxed{\mathbf{5п}}$. Висина са које је камен пуштен да слободно пада је $h = \frac{v_3^2}{2g}$ $\boxed{\mathbf{2п}}$. Заменом израза за v_3 у израз за h добија се $h = \frac{(3k-1)^2}{8(k-1)^2}g$ $\boxed{\mathbf{5п}}$.



Слика 1: Ситуација пре него што је тег с десне стране додирнуо подлогу.



Слика 2: Ситуација након што је тег с десне стране додирнуо подлогу.

Задатке припремили: *др Петар Мали* и *мастер Давид Кнежевић*, Природно-математички факултет, Нови Сад
Рецензент: *др Милутин Степић*, Институт за нуклеарне науке "Винча", Београд
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд

4. Једначине кретања су: $Ma_1 = Mg - T_1$ $\boxed{\textbf{1п}}$, $ma_1 = mg + T_1 - T_2$ $\boxed{\textbf{1п}}$ и $Ma_1 = T_2 - Mg$ $\boxed{\textbf{1п}}$ (видети Слику 1), одакле се сређивањем добија $a_1 = \frac{m}{2M+m}g = \frac{g}{5}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Време потребно десном тегу да се спусти $s = 30\text{cm}$ и додирне подлогу је $t_p = \sqrt{\frac{2s}{a_1}} = \sqrt{\frac{10s}{g}}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Интензитет брзине тега у том тренутку је $v_p = a_1 t_p = \sqrt{\frac{2sg}{5}}$ $\boxed{\textbf{2п}}$, што је у датом тренутку интензитет брзине и осталих тегова. Пошто је десни тег додирнуо подлогу, потребно је написати нове једначине кретања за преостале тегове. Ове једначине су $ma_2 = T_3 - mg$ $\boxed{\textbf{1п}}$ и $Ma_2 = Mg - T_3$ $\boxed{\textbf{1п}}$ (видети Слику 2), одакле се добија да је $a_2 = \frac{M-m}{M+m}g = \frac{g}{3}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Време које би десном тегу било потребно да се заустави при оваквом кретању је $t_{\max} = \frac{v_p}{a_2} = \sqrt{\frac{18s}{5g}}$ $\boxed{\textbf{2п}}$, при чему би прешао $l = v_p t_{\max} - \frac{1}{2}a_2 t_{\max}^2 = \frac{6}{5}s - \frac{3}{5}s = \frac{3}{5}s = 18\text{cm}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Како је $l > h$ следи да ће се тегови са десне стране дотаћи $\boxed{\textbf{3п}}$.
Напомена:
Рачунањем међукорака, добија се $a_1 = 1{,}96\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $t_p = 0{,}55\text{s}$, $v_p = 1{,}08\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $a_2 = 3{,}27\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $t_{\max} = 0{,}33\text{s}$. Рачунањем са овим бројним вредностима добија се $l = 17{,}83\text{cm}$. Не скидати поене ученицима, који су рачунали међукораке и на крају добили овакво решење.

5. Посматрајмо кретање дуж y- осе. Време потребно да лопта дође у највишу тачку путање, се може добити из чињенице да је у највишој тачки y компонента брзине једнака нули: $v_y = v_{0y} - gt_1$, $t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Лопта ће се у том тренутку наћи на висини $y_{\max} = v_{0y}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{g} - \frac{1}{2g}v_0^2\sin^2\theta = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. За то време је лопта по $x-$ оси прешла пут од $x_1 = v_{0x}t_1 = \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Након што лопта достигне максималну висину, њено кретање у $y-$ правцу се може третирати као слободан пад без почетне брзине, где се пређени пут може рачунати као $y = \frac{1}{2}gt^2$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Да би се лопта нашла на $\Delta y = 30\text{cm}$ ниже од почетног положаја на $y-$ оси, потребно је да пређе пут од $y_{\max} + \Delta y$ $\boxed{\textbf{3п}}$ за шта јој је потребно време: $t_2 = \sqrt{\frac{2(y_{\max}+\Delta y)}{g}} = \sqrt{\frac{2(\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}+\Delta y)}{g}}$ $\boxed{\textbf{3п}}$. Током падања, лопта је по x–оси прешла пут од $x_2 = v_{0x}t_2 = v_0\cos\theta\sqrt{\frac{2(\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}+\Delta y)}{g}}$ $\boxed{\textbf{3п}}$, при чему се у неком тренутку одбила од зида. Пређени пут лопте у x–правцу, $x = x_1 + x_2$, сабран са растојањем које је прешао човек, мора у збиру дати двоструко растојање између човека и зида. Одатле следи да је човек прешао пут од $s_c = 2d - x = 2d - \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} - v_0\cos\theta\sqrt{\frac{2(\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}+\Delta y)}{g}}$ $\boxed{\textbf{4п}}$. Како је лопта пре него што ју је човек ухватио путовала $t_u = t_1 + t_2$, човек се кретао брзином од $v_c = \frac{s_c}{t_u - 0{,}5\text{s}} = 4{,}37\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\boxed{\textbf{4п}}$.
други начин:
Кретање лопте између бацања и хватања се може поделити на три дела. Коси хитац навише од избацивања до највише тачке путање, хоризонтални хитац од највише тачке путање до судара са зидом, и коси хитац наниже након судара са зидом до тренутка када човек ухвати лопту. Време потребно да лопта дође у највишу тачку путање, се може добити из чињенице да је у највишој тачки y компонента брзине једнака нули: $v_y = v_{0y} - gt_1$, $t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0\sin\theta}{g} = 1{,}11\text{s}$ $\boxed{\textbf{2п}}$.Лопта ће се у том тренутку наћи на висини $y_{\max} = v_{0y}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{g} - \frac{1}{2g}v_0^2\sin^2\theta = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g} = 6{,}07\text{m}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. За то време је лопта по $x-$ оси прешла пут од $x_1 = v_{0x}t_1 = \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} = 13{,}02\text{m}$ $\boxed{\textbf{2п}}$, где је $v_{0x} = v_0\cos\theta = 11{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Након овог тренутка, кретање лопте третирамо као хоризонтални хитац са брзином у смеру x–осе $v_x = v_{0x} = 11{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Да би стигла до зида удаљеног $d = 17\text{m}$, лопта треба по $x-$ оси да пређе растојање од $x_2 = d - x_1 = 3{,}98\text{m}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Да би прешла ово растојање, потребно јој је време $t_2 = \frac{x_2}{v_{0x}} = 0{,}34\text{s}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. За то време ће по $y-$ оси прећи пут од $y_2 = \frac{1}{2}gt_2^2 = 0{,}57\text{m}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. У тренутку када udari у зид, y компонента брзине ће бити $v_y = gt_2 = 3{,}34\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Од овог трена па до трена када човек ухвати лопту, кретање лопте се третира као коси хитац наниже са почетним брзинама дуж x и $y-$ осе $v_x' = v_{0x} = 11{,}7\frac{\text{m}}{\text{s}}$ и $v_y' = v_y = 3{,}34\frac{\text{m}}{\text{s}}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Да би се лопта нашла на $\Delta y = 30\text{cm}$ ниже од почетног положаја на y –оси, потребно је да по $y-$ оси пређе пут од $y_3 = y_{\max} - y_2 + y = 5{,}80\text{m}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Време које је потребно да лопта пређе овај пут приликом косог хица наниже се може пронаћи решавањем квадратне једначине по времену за пређени пут $y_3 = v_y't_3 + \frac{1}{2}gt_3^2$ $\boxed{\textbf{2п}}$, односно $\frac{1}{2}gt_3^2 + v_y't_3 - y_3 = 0$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Из ове једначине узима се само позитивно решење, тј. $t_3 = \frac{-v_y' + \sqrt{v_y'^2 + 2gy_3}}{g} = 0{,}8\text{s}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. По $x-$ оси лопта ће прећи пут од $x_3 = v_x't_3 = 9{,}36\text{m}$ $\boxed{\textbf{1п}}$. Растојање s_c које пређе човек би требало у збиру са растојањем x_3 да буде једнако почетном растојању између човека и зида, одакле се добија $s_c = d - x_3 = 7{,}64\text{m}$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Како је лопта пре него што

ју је човек ухватио путовала $t_u = t_1 + t_2 + t_3 = 2{,}25\mathsf{s}$ $\boxed{\textbf{1п}}$, човек се кретао брзином од $v_c = \frac{s_c}{t_u - 0{,}5\mathsf{s}} = 4{,}37\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$ $\boxed{\textbf{2п}}$.
трећи начин:
Ако се узме да је позиција лопте на y – оси, $y = 0$ приликом бацања лопте, потребно је наћи тренутак када ће се лопта наћи на позицији $y = -0{,}3\mathsf{m}$ на y –оси $\boxed{\textbf{2п}}$. Ово време се може пронаћи из једначине кретања $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ $\boxed{\textbf{2п}}$. Решавањем ове квадратне једначине за $y = -0{,}3\mathsf{m}$, где је $v_{0y} = v_0 \sin\theta$, добија се $t_{1,2} = \frac{v_0 \sin\theta \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta - 2gy}}{g}$ $\boxed{\textbf{5п}}$, одакле се узима само позитивно решење $t = \frac{v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta - 2gy}}{g}$ $\boxed{\textbf{5п}}$. За то време по x– оси лопта прелази пут од $x = v_{0x}t = v_0 \cos\theta \frac{v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta - 2gy}}{g}$ $\boxed{\textbf{2п}}$, при чему се у неком тренутку одбија од зида. Овај пут сабран са растојањем које је прешао човек треба да буде једнако двоструком растојању између човека и зида ($2d = 34\mathsf{m}$) $\boxed{\textbf{2п}}$. Пут који је човек требао да пређе да би ухватио лопту је $s_c = 2d - x = 2d - v_0 \cos\theta \frac{v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta - 2gy}}{g}$ $\boxed{\textbf{5п}}$.
Брзина којом се човек кретао је: $v_c = \frac{s_c}{t - 0{,}5\mathsf{s}} = 4{,}37\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$ $\boxed{\textbf{2п}}$.

Задатке припремили: *др Петар Мали* и *мастер Давид Кнежевић*, Природно-математички факултет, Нови Сад
Рецензент: *др Милутин Степић*, Институт за нуклеарне науке "Винча", Београд
Председник Комисије за такмичења ученика средњих школа: *др Божидар Николић*, Физички факултет, Београд